

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto E , u_E , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

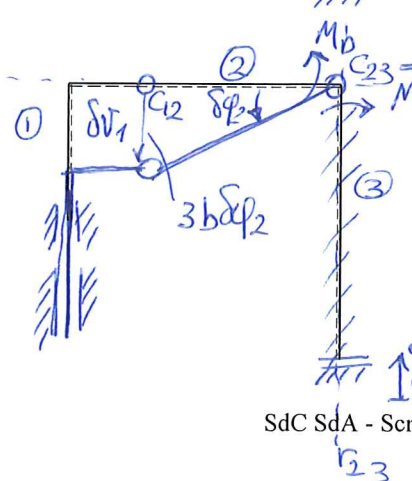
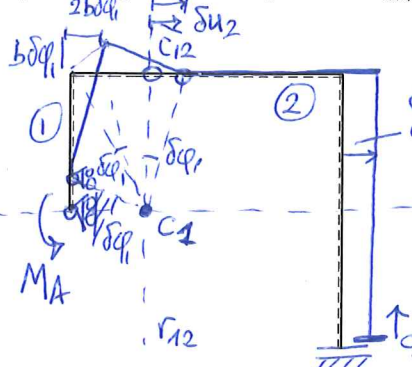
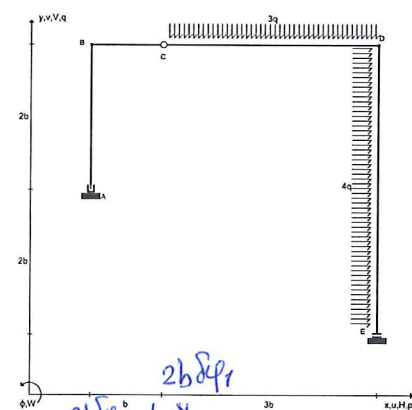
Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste ABC , CD , DE) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto D , u_D , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto C , v_C .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Università di Cagliari SdC_SdA 07.02.23'004



$$\begin{cases} C_1 \in r_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_1 \in r_{12} \end{cases}$$

$$2b\delta\varphi_1 = \delta u_2$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in r_{12} \\ C_3 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in r_{23} \end{cases}$$

$$C_2 \equiv C_{23}$$

È LA TRAVE ③ NON SI SPOSTA

$$3b\delta\varphi_2 = \delta v_1$$

$$M_A(\hat{\sigma}) = \frac{32qb^2}{\dots}; C_1 = (\frac{b}{\dots}, \frac{0}{\dots}); C_2 = (\frac{\infty}{\dots}, \frac{\infty}{\dots}); C_{12} = (\frac{b}{\dots}, \frac{2b}{\dots});$$

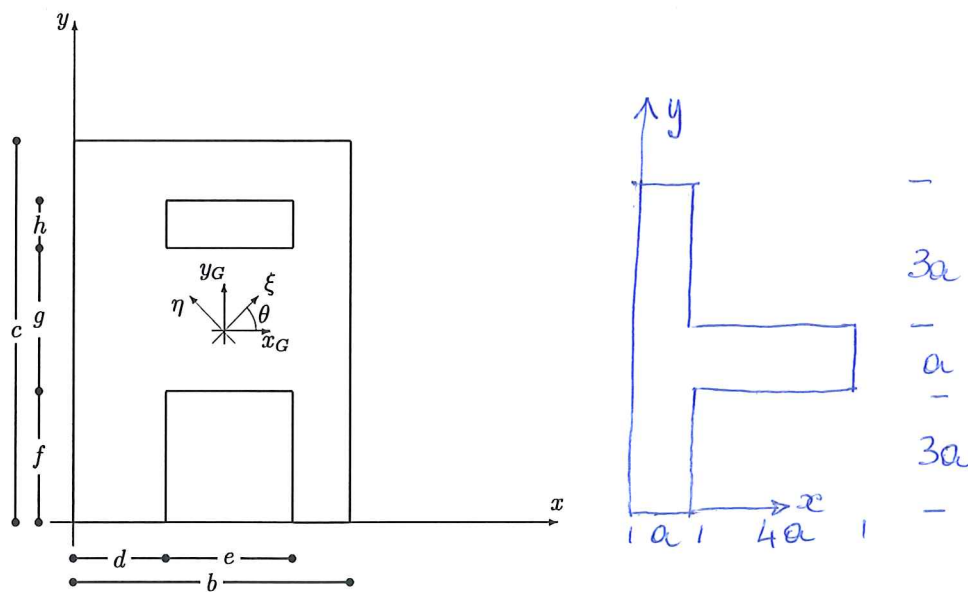
$$u_E = \frac{\delta u_2 = 2b\delta q_1}{\dots}; v_B = \frac{b\delta q_1}{\dots};$$

$$M_D(\hat{\sigma}) = \frac{-27qb^2}{\dots}; u_D = \frac{0}{\dots}; v_C = \frac{-\delta V_1 = -3b\delta q_2}{\dots};$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 5a$; $c = 7a$; $d = 1a$; $e = 4a$; $f = 3a$; $g = 1a$; $h = 3a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



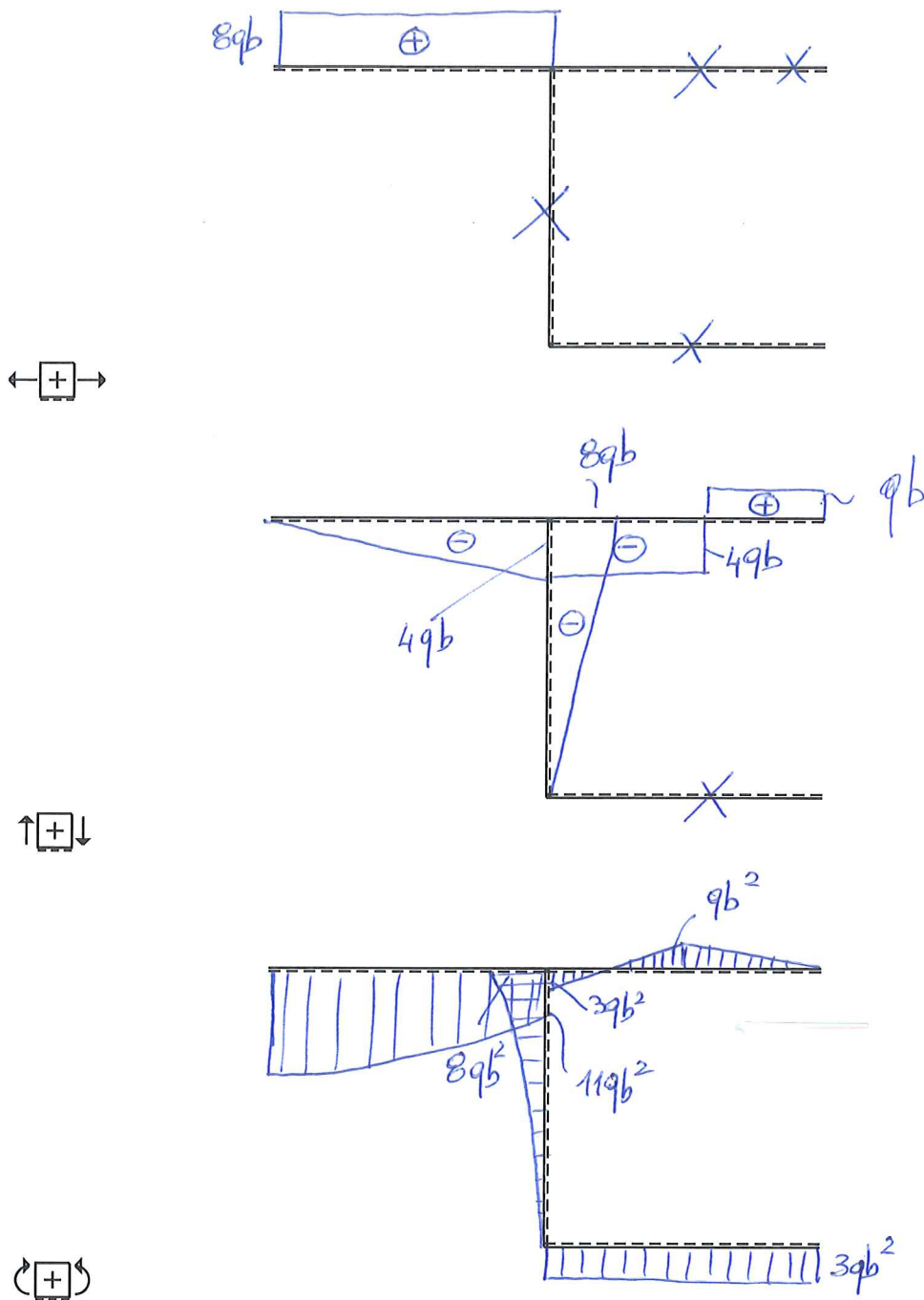
$$S_x = \frac{77}{2}a^3 = 38.5000a^3; S_y = \frac{31}{2}a^3 = 15.5000a^3;$$

$$x_G = \frac{31}{22}a = 1.40909a; y_G = \frac{7}{2}a = 3.50000a;$$

$$J_{xG} = \frac{347}{12}a^4 = 28.91667a^4; J_{yG} = \frac{2881}{132}a^4 = 21.82576a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 \quad (\theta = 0^\circ);$$

$$J_\xi = J_{\max} = \frac{347}{12}a^4 = 28.91667a^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{2881}{132}a^4 = 21.82576a^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= -8qb; & M_A (\curvearrowleft) &= -15qb^2; & V_D (\uparrow) &= -qb; & V_F (\uparrow) &= 0; & M_F (\curvearrowleft) &= 3qb^2; \\
 N_{AB} &= 8qb; & T_{AB} &= -2qx_1; & M_{AB} &= 15qb^2 - qx_1^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= -4qb; & M_{BC} &= +3qb^2 - 4qb \times 4; \\
 N_{CD} &= 0; & T_{CD} &= qb; & M_{CD} &= -qb^2 + qb \times 5; \\
 N_{FE} &= 0; & T_{FE} &= 0; & M_{FE} &= -3qb^2; \\
 N_{EB} &= 0; & T_{EB} &= -4qx_2; & M_{EB} &= -2qx_2^2;
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 07.02.2023

Parte I - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soliti fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

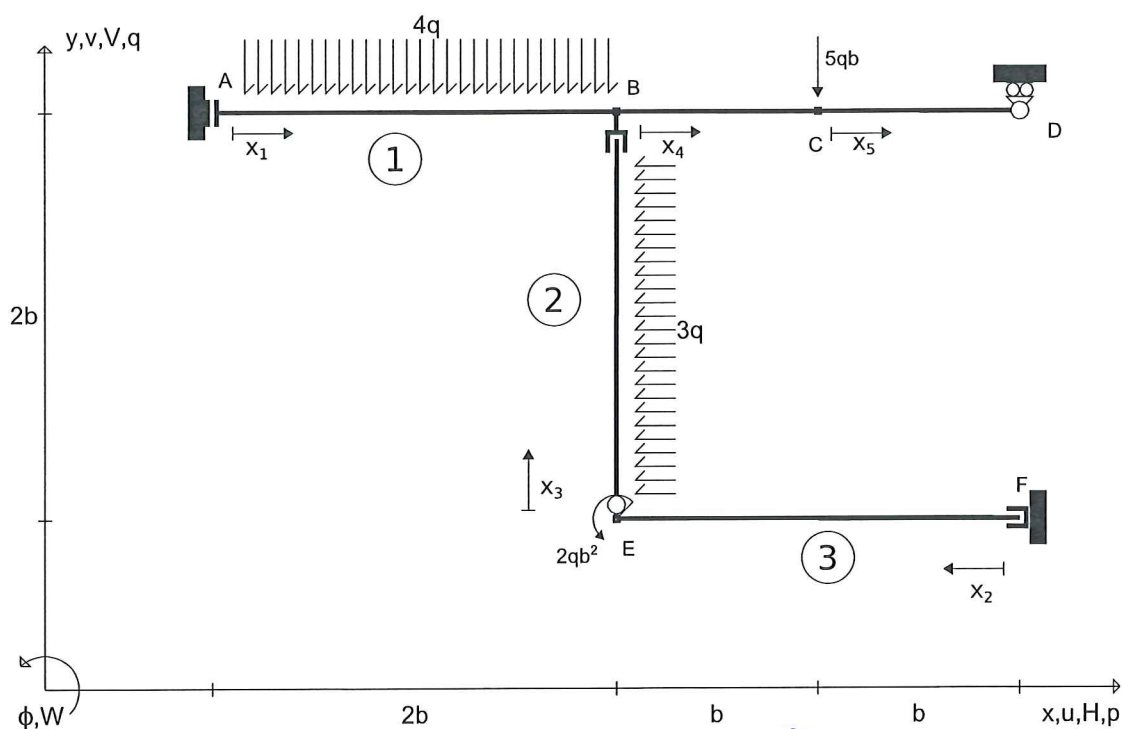
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 07.02.23*002



Eq. ausiliarie: $R_y^{(2)+(3)} = 0$; $M_{Z(E)}^{(3)} = 0$
 (oppure: $R_y^{(1)} = 0$; $M_{Z(E)}^{(1)+(2)} = 0$)

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto E , u_E , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

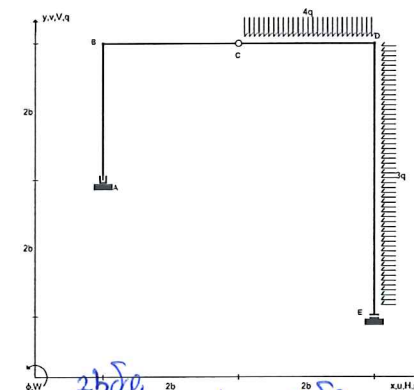
Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste ABC , CD , DE) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto D , u_D , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto C , v_C .

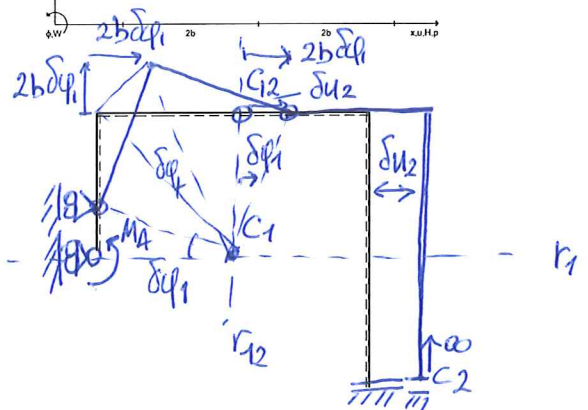
Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Università di Cagliari SdC_SdA 07.02.23*005



$$\begin{cases} C_1 \in r_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_1 \in r_{12} \end{cases}$$

$$2b\delta\varphi_1 = \delta u_2$$



$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{12} \\ C_3 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{23} \end{cases} \quad \begin{matrix} \infty \\ C_1 \end{matrix}$$

$$C_2 \equiv C_{23}$$

È LA TRAVE ③ NON SI SPESITA

$$2b\delta\varphi_2 = \delta v_1$$

$$M_A(\curvearrowright) = -24qb^2; C_1 = (2b, 0); C_2 = (\infty, \infty); C_{12} = (2b, 2b);$$

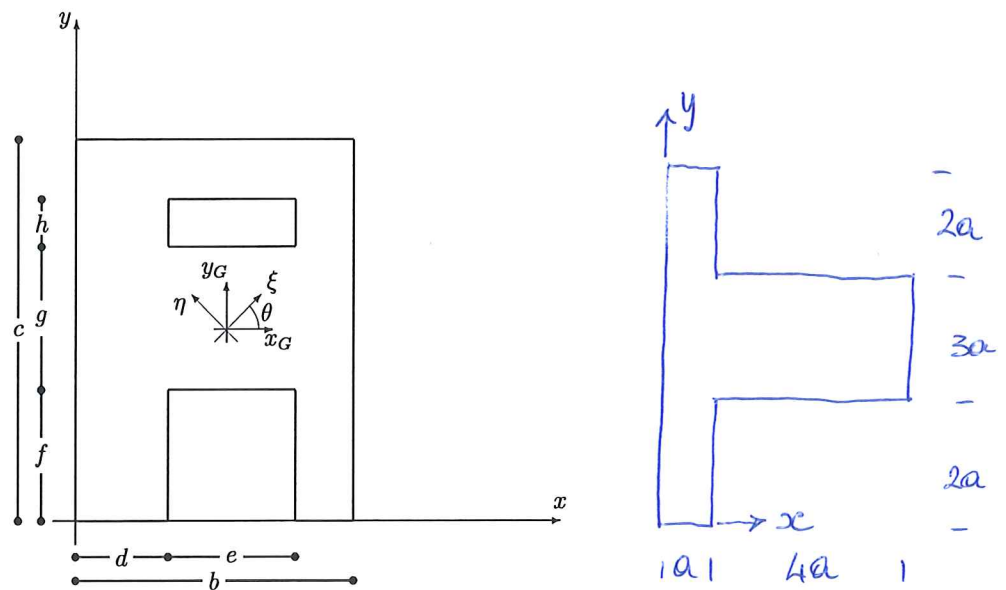
$$u_E = \delta u_2 = 2b\delta q; v_B = +2b\delta q;$$

$$M_D(\curvearrowright) = -8qb^2; u_D = 0; v_C = -\delta u_1 = -2b\delta q_2$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 5a$; $c = 7a$; $d = 1a$; $e = 4a$; $f = 2a$; $g = 3a$; $h = 2a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



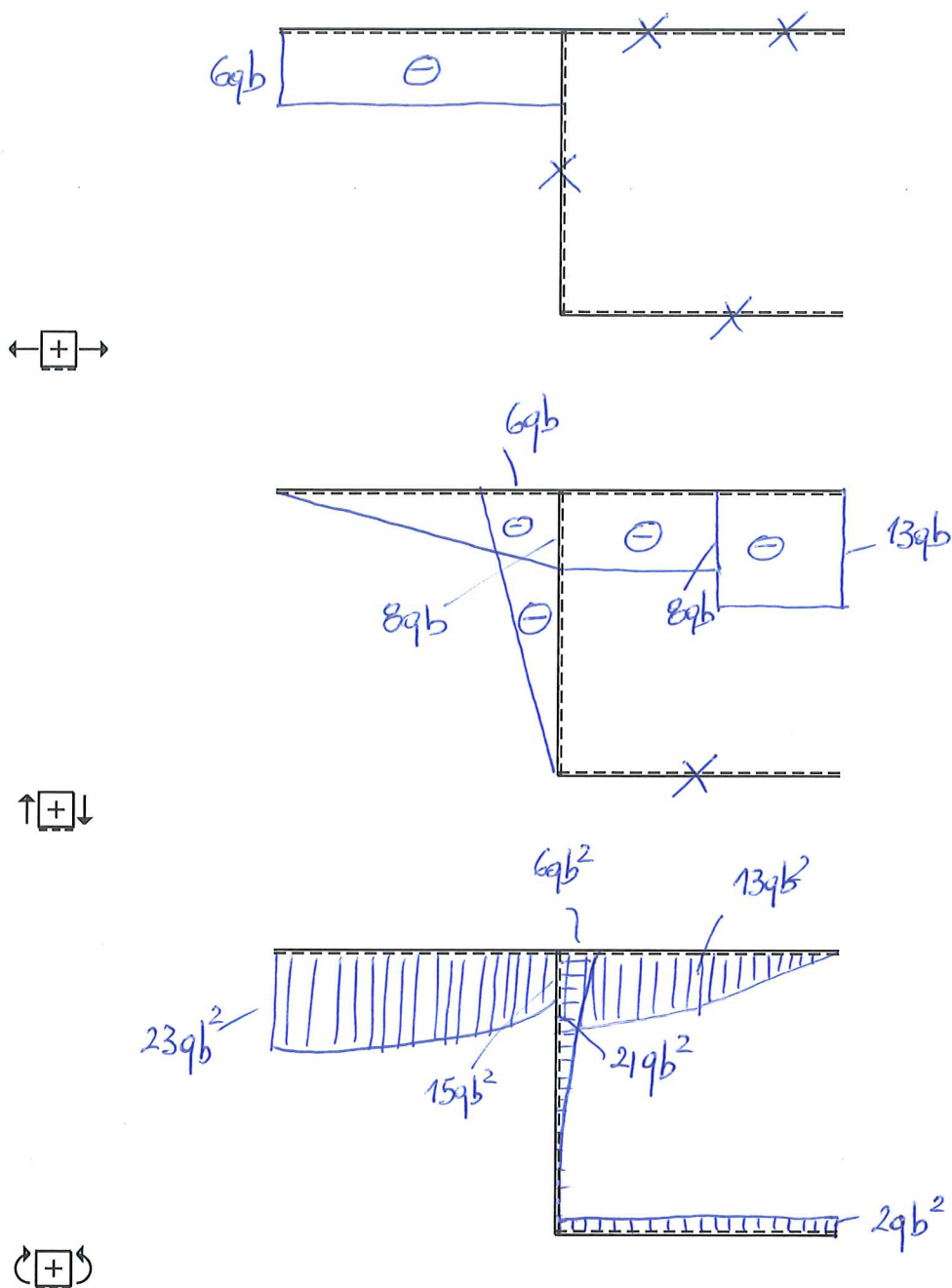
$$S_x = \frac{133}{2} a^3 = 66.5000 a^3; S_y = \frac{79}{2} a^3 = 39.5000 a^3;$$

$$x_G = \frac{79}{38} a = 2.07895 a; y_G = \frac{7}{2} a = 3.50000 a;$$

$$J_{xG} = \frac{451}{12} a^4 = 37.58333 a^4; J_{yG} = \frac{10081}{228} a^4 = 44.21491 a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 \quad (\theta = 90^\circ);$$

$$J_\xi = J_{\max} = \frac{10081}{228} a^4 = 44.21491 a^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{451}{12} a^4 = 37.58333 a^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 6qb; & M_A (\curvearrowright) &= -23qb^2; & V_D (\uparrow) &= 13qb; & V_F (\uparrow) &= 0; & M_F (\curvearrowright) &= -2qb^2; \\
 N_{AB} &= -6qb; & T_{AB} &= -4qx_1; & M_{AB} &= 23qb^2 - 2qx_1^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= -8qb; & M_{BC} &= 21qb^2 - 8qb x_4; \\
 N_{CD} &= 0; & T_{CD} &= -13qb; & M_{CD} &= 13qb^2 - 13qb x_5; \\
 N_{FE} &= 0; & T_{FE} &= 0; & M_{FE} &= 2qb^2; \\
 N_{EB} &= 0; & T_{EB} &= 3qx_2; & M_{EB} &= \frac{3}{2}qx_2^2;
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 07.02.2023

Parte I - Testo 3

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

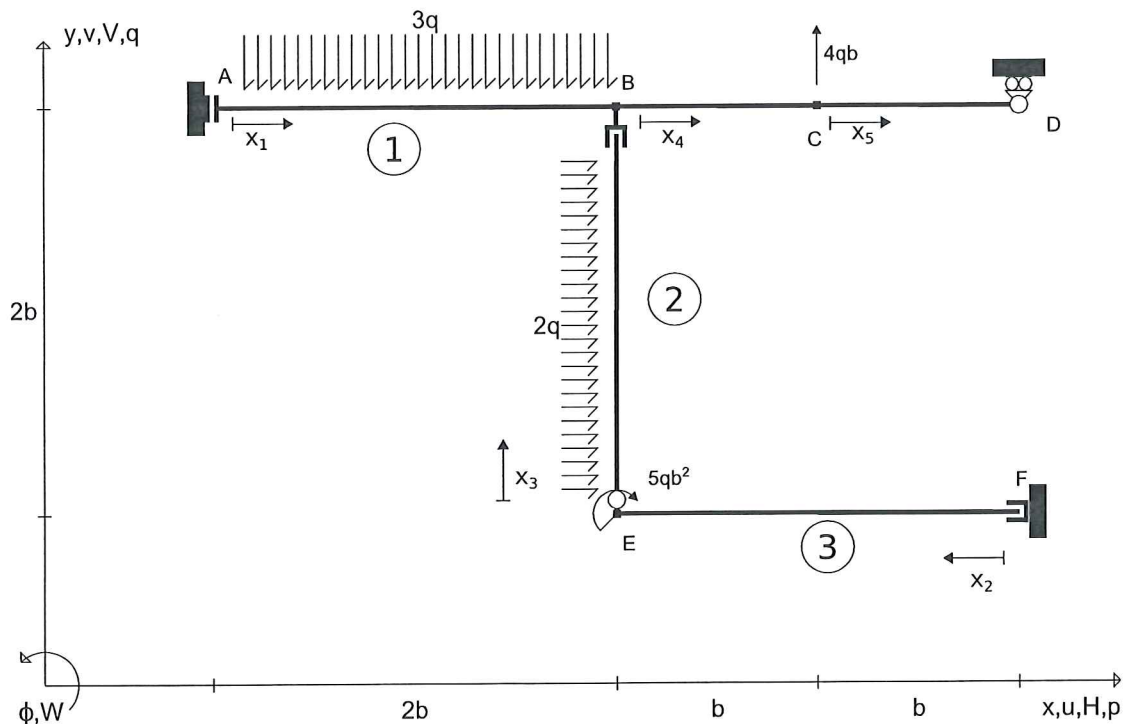
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 07.02.23*003



Eq. ausiliarie: $R_y^{(2+3)} = 0$; $M_{z(E)}^{(3)} = 0$
(oppure $R_y^{(1)} = 0$; $M_{z(E)}^{(1+2)} = 0$)

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

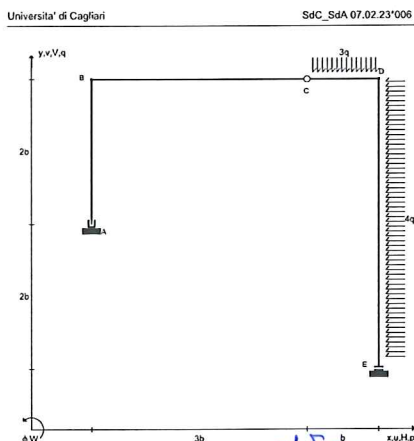
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto E , u_E , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste ABC , CD , DE) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto D , u_D , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto C , v_C .

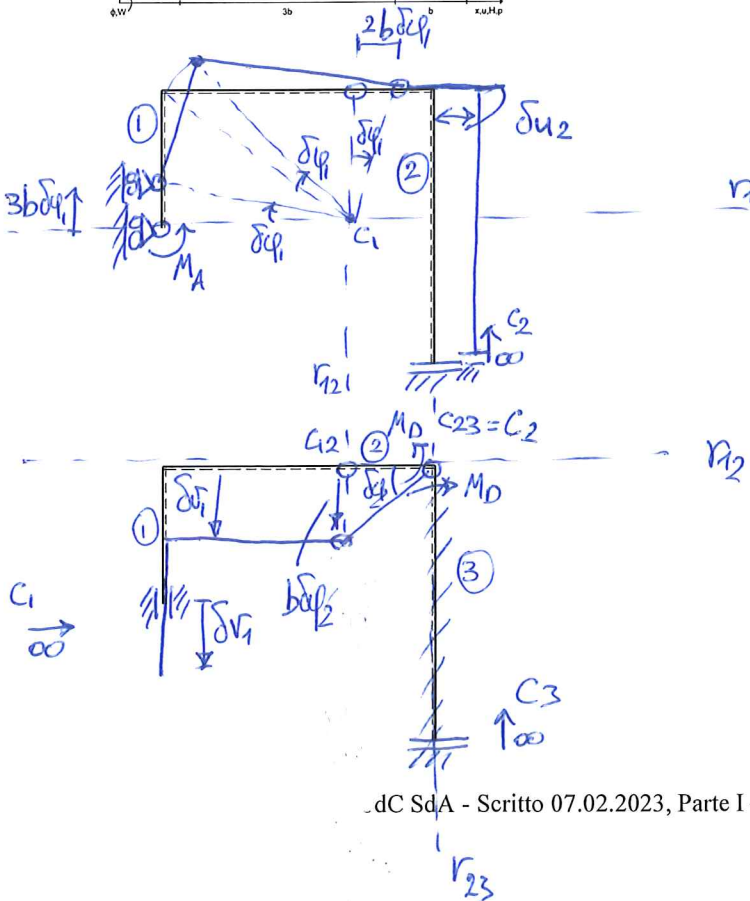
Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.



$$\begin{cases} C_1 \in r_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_1 \in r_{12} \end{cases}$$

$$2b\delta\varphi_1 = \delta u_2$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{12} \\ C_3 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{23} \end{cases}$$



$$M_A(\hat{\sigma}) = -32qb^2; C_1 = (3b, 0); C_2 = (\infty, \infty); C_{12} = (2b, 2b);$$

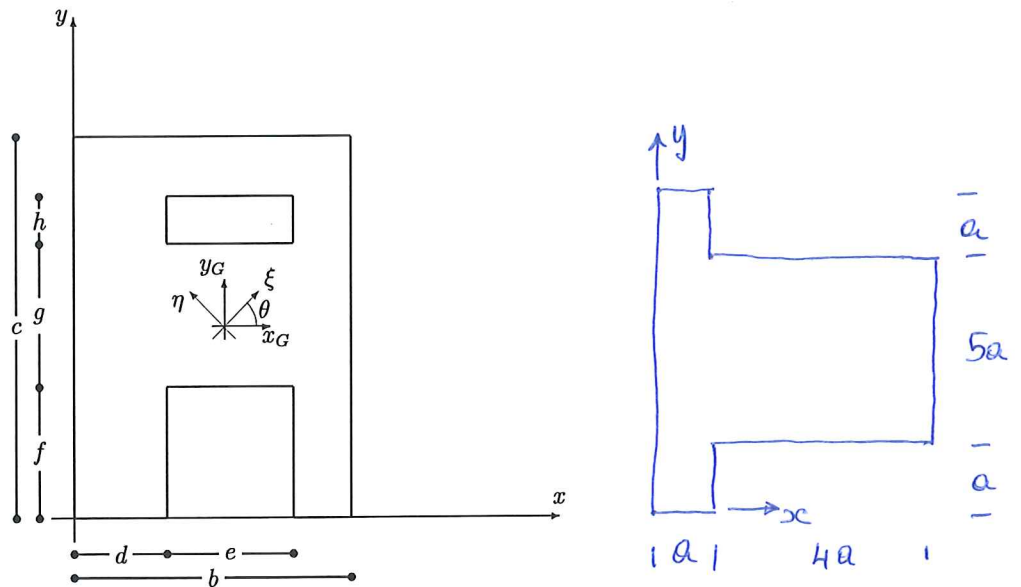
$$u_E = \delta u_2 = 2b\delta q; v_B = 3b\delta q;$$

$$M_D(\hat{\sigma}) = -\frac{3}{2}qb^2; u_D = 0; v_C = -b\delta q_2 = -\delta v_1$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 5a$; $c = 7a$; $d = 1a$; $e = 4a$; $f = a$; $g = 5a$; $h = 1a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



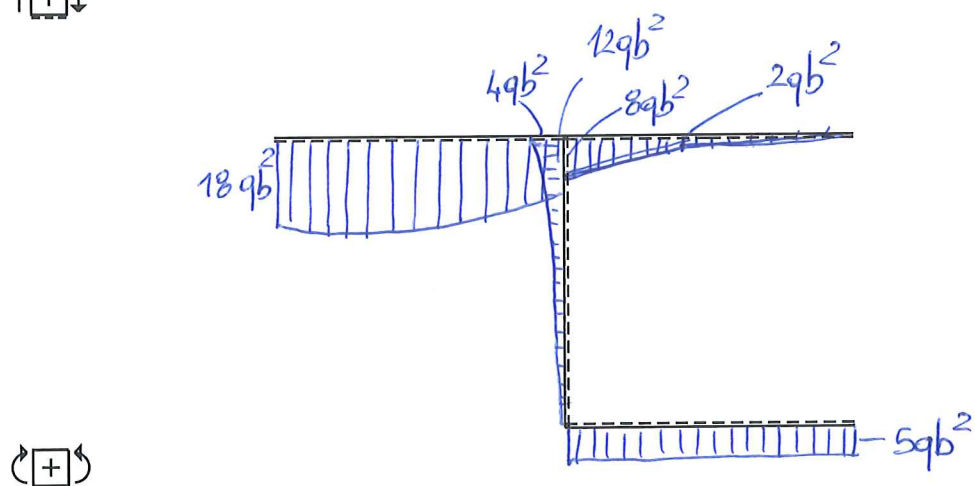
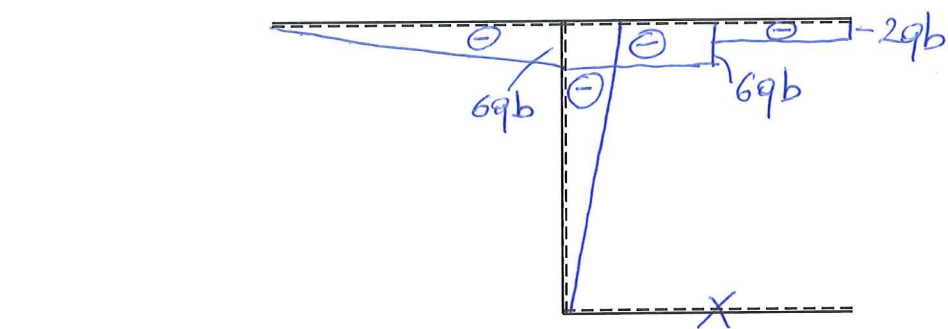
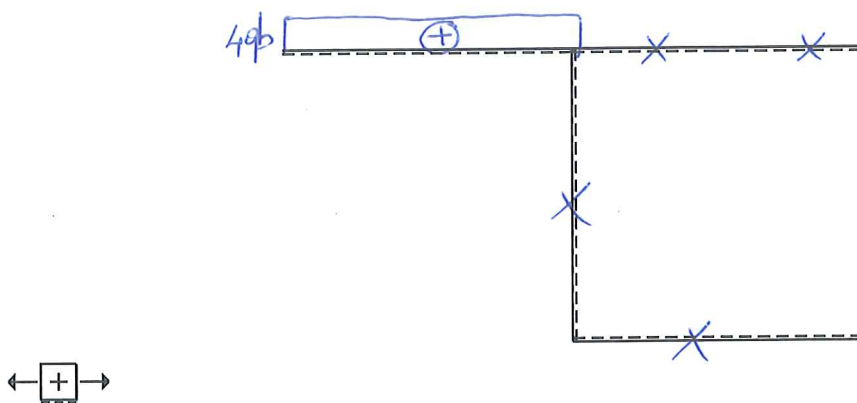
$$S_x = \frac{189}{2} a^3 = 94.5000 a^3; S_y = \frac{127}{2} a^3 = 63.5000 a^3;$$

$$x_G = \frac{127}{54} a = 2.35185 a; y_G = \frac{7}{2} a = 3.50000 a;$$

$$J_{xG} = \frac{281}{4} a^4 = 70.25000 a^4; J_{yG} = \frac{6443}{108} a^4 = 59.65741 a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 \quad (\theta = 0^\circ);$$

$$J_\xi = J_{\max} = \frac{281}{4} a^4 = 70.25000 a^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{6443}{108} a^4 = 59.65741 a^4;$$



$H_A (\Rightarrow) = -4qb$	$M_A (\curvearrowright) = -18qb^2$	$V_D (\uparrow) = 2qb$	$V_F (\uparrow) = 0$	$M_F (\curvearrowright) = 5qb^2$
$N_{AB} = 4qb$	$T_{AB} = -3qx_1$	$M_{AB} = 18qb^2 - \frac{3}{2}qx_1^2$		
$N_{BC} = 0$	$T_{BC} = -6qb$	$M_{BC} = 8qb^2 - 6qbx_4$		
$N_{CD} = 0$	$T_{CD} = -2qb$	$M_{CD} = 2qb^2 - 2qbx_5$		
$N_{FE} = 0$	$T_{FE} = 0$	$M_{FE} = -5qb^2$		
$N_{EB} = 0$	$T_{EB} = -2qx_3$	$M_{EB} = -qx_3^2$		